Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych. ①

Niech $f(x)$ będzie funkcją $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ oraz $h(x)$ będzie funkcją $h:(c,d)\to\mathbb{R}$. Obie funkcje są ciągłe przy czym $h(y)\neq 0$ dla każdego $y\in(c,d)$. Przedziały $(a;b)$ i (c,d) mogą być skończone lub nieskończone.

Definicja Równanie różniczkowe

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{h(y)}$$ o funkcji niewiadomej

$y(x)$, nazywamy równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych.

Równanie (1) zapisujemy także w postaci:

$$(2) \qquad h(y)\cdot y' = f(x)$$

lub w postaci różniczkowej:

$$(3) \qquad h(y)dy = f(x)dx$$

Tu widać rozdzielenie zmiennych.

Całkując obustronnie równanie (3) otrzymujemy

$$\int h(y)dy=\int f(x)dx + C$$

Przykład 1. Znaleźć całkę ogólną równania

$$\frac{dy}{dx}=e^{-y}\cos 2x$$

Rozw.

Tu $f(x)=\cos 2x$ zaś $h(y)=e^{y}$.

Rozdzielamy zmienne x i y pisząc równanie w postaci:

$$e^{y}dy=\cos 2x\,dx \qquad (4)$$

a następnie znajdujemy całkę ogólną:

$$e^{y}=\frac{1}{2}\sin 2x + C \qquad (5)$$

Gdyby był podany warunek początkowy $y(0)=0$, to do równania (5) podstawiamy $x=0$ i $y=0$ i otrzymujemy

$1=\frac{1}{2}\sin 2\cdot 0 + C$, stąd $C=1$

Zatem całkę szczególną równania (4) przy warunku początkowym $y(0) = 0$ jest:

$$e^y = \frac{1}{2}\sin 2x + 1$$ lub w postaci jawnej,

po zlogarytmowaniu obu stron otrzymujemy:

$$y = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right) \qquad (6)$$

Przykład 2 Znaleźć krzywą całkową równania:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y} \qquad (7)$$

przechodzącą przez punkt $(1, 1)$.

Rozw. Rozdzielając zmienne otrzymamy:

$$y\,dy = -2x\,dx$$

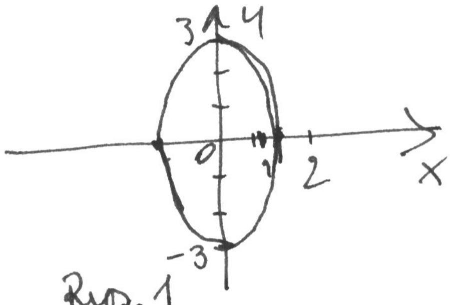
Po obustronnym scałkowaniu mamy

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C \quad \text{albo} \quad x^2 + \frac{y^2}{2} = C \qquad (8)$$

Otrzymane równanie (8) dla każdego C przedstawia elipsę.

Górny (dla $y>0$) i dolny (dla $y<0$) łuk każdej z tych elips jest wykresem funkcji spełniającej równanie (7). Uwzględniając warunek początkowy $y(1) = 1$ otrzymamy $C = \frac{3}{2}$. Szukaną krzywą całkową jest elipsa o równaniu $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$

przedstawiona na rys. 1



Rys. 1

Równania jednorodne

Niech $f(u)$ będzie funkcją określoną i ciągłą w przedziale (a, b) spełniającą w nim warunek $f(u) \neq u$.
Równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (9)$$

o funkcji niewiadomej $y(x)$ nazywamy równaniem różniczkowym jednorodnym.
Równanie to można za pomocą podstawienia:

$$u(x) = \frac{y}{x} \qquad (10)$$

Sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych:
Bo $\frac{dy}{dx} = f(u(x))$, ale $y = x \cdot u(x)$ więc $\frac{dy}{dx} = u(x) + x \cdot \frac{du}{dx}$

Zatem

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u) \quad \text{czyli} \quad x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

Ostatecznie

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u} \qquad (10)$$

Równanie (10) jest już równaniem o zmiennych rozdzielonych.

Przykład 3 Znaleźć całkę ogólną równania:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} \qquad \text{inaczej} \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$$

Rozw.
Podstawiając $u = \frac{y}{x}$ otrzymamy $\frac{dy}{dx} = 1 + u$ (11)
ale $y = x \cdot u$, zatem $\frac{dy}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$ (12)
Lewe strony (11) i (12) są takie same więc prawe też.
Mamy $1 + \cancel{u} = \cancel{u} + x\frac{du}{dx}$ czyli $x\frac{du}{dx} = 1$ (13)
Otrzymujemy rozdzielając zmienne $du = \frac{dx}{x}$
Całkując otrzymamy $\int du = \int \frac{dx}{x} \to u = \ln|x| + C$
Ponieważ $y = u \cdot x$, więc ostatecznie

$$y = x\ln|x| + C$$

Równanie różniczkowe Bernoulliego

Niech dane będą funkcje $p(x)$ i $q(x)$ ciągłe w pewnym przedziale (a,b) oraz dowolna liczba rzeczywista r.

Definicja. Równanie różniczkowe pierwszego rzędu:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\cdot y + q(x)\cdot y^r \qquad (14)$$

nazywamy równaniem różniczkowym Bernoulliego.

Gdy $r=0$, równanie (14) jest równaniem liniowym niejednorodnym. Gdy $r=1$, jest równaniem liniowym jednorodnym.

Załóżmy więc że $r\neq 0$ i $r\neq 1$. Wtedy równanie (14) nie jest równaniem liniowym dla funkcji niewiadomej y. Można je sprowadzić do równania liniowego ze względu na inną funkcję niewiadomą. W tym celu korzystamy z podstawienia

$$z = y^{1-r} \qquad (15).$$

przy czym zakładamy, że $(y(x))^{1-r}$ jest określone na przedziale (a,b). Różniczkując (15) względem x, mamy

$$\frac{dz}{dx} = (1-r)\,y^{-r}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad (16).$$

Mnożąc obustronnie równanie (14) przez $(1-r)y^{-r}$ otrzymamy

$$(1-r)y^{-r}\frac{dy}{dx} = (1-r)p(x)\cdot y^{1-r} + (1-r)\cdot q(x)$$

Stąd na podstawie (15) i (16) otrzymujemy

$$\frac{dz}{dx} = (1-r)p(x)\cdot z + (1-r)\cdot q(x) \qquad (17)$$

Zatem jeśli $y(x)$ jest rozwiązaniem równania (14), to $z(x)$ określona wzorem (15) jest rozwiązaniem równania (17)

Mnożąc obustronnie równanie (17) przez $\frac{y^r}{1-r}$ oraz korzystając z (15) otrzymujemy równanie (14).
Oznacza to, że jeżeli funkcja $z(x)$ jest rozwiązaniem równania (17), to funkcja $y(x)$ spełniająca związek (15) jest rozwiązaniem równania (14).
Równanie (17) jest równaniem liniowym.

Przykład 4 Znaleźć całkę ogólną równania Bernoulliego:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y - \frac{\ln x}{x}\cdot y^2 \qquad (18)$$

Rozw. Tu $r=2$ więc podstawienie $z = y^{1-r}$ ma postać $z = \frac{1}{y}$.

Zgodnie z równaniem (17) równanie (18) zastępujemy równaniem liniowym

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}z - \frac{\ln x}{x} \qquad (19)$$

Rozwiązanie równania jednorodnego ma postać $y = Cx$ gdzie C jest dowolną stałą. Jest tak dlatego, że r-nie jednorodne jest postaci $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}z$ co po rozdzieleniu zmiennych daje $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln|z| = \ln|x| + \ln C$

Czyli $\ln|z| = \ln|Cx|$ stąd $z = Cx$.
Stosując uzmiennianie stałej C, przyjmujemy $z = C(x)\cdot x$.
Obliczamy $z' = C'(x)\cdot x + C(x)$ i zgodnie z (19) mamy

$$C'(x)x + C(x) = \frac{1}{\cancel{x}}\cdot C(x)\cdot \cancel{x} - \frac{\ln x}{x} \equiv C'(x)x + \cancel{C(x)} = \cancel{C(x)} - \frac{\ln x}{x}$$

$$C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

Całkując otrzymamy $C(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C_1$

Wzór $z = C_1 x + \ln x + 1$ przedstawia rozwiązanie równania (19)
a wzór
$$y = \frac{1}{C_1 x + \ln x + 1}$$
przedstawia całkę ogólną równania (18)